§3 Das Spektrum

In der linearen Algebra wird das Spektrum eines Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ als die Menge der EW von F definiert. Ist $\dim(V) < \infty$ so gilt: $\lambda \in \mathbb{C}$ ist EW von F
$\iff F - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht injektiv
$\iff F - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht bijektiv
(Dimensionsformel für $F - \lambda\,\mathrm{id}$).

Ist E ein ∞-dim VR, so gilt die letzte Äquivalenz nicht mehr, ist z.B.

$$S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad (Sf)(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ f(n-1), & n > 1 \end{cases},$$

also $f = (f(1), f(2), f(3), \dots) \longrightarrow Sf = (0, f(1), f(2), f(3), \dots)$

so ist S injektiv (sogar isometrisch) aber nicht surjektiv, da z.B. $(1, 0, \dots, 0) \notin S(\ell^2(\mathbb{N}))$!

Ist E ein Banachraum, und $T \in L(E)$, so def. wir das Spektrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ von T durch
$\lambda \in \sigma(T) \iff T - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht bijektiv

Bsp: Es gilt $0 \in \sigma(S)$, aber 0 ist kein EW von S!

Nach dem Satz über die offene Abb. (FA Satz 10.11) gilt $T - \lambda\,\mathrm{id}$ bijektiv $\iff \exists$ stetige Inverse $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$
$\iff T - \lambda\,\mathrm{id} \in G(L(E))$.

Dies motiviert:

3.1 Definition: Sei A eine unitale Algebra $(\mathbb{C})$ und sei $a \in A$. Dann heißt $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda 1_A \notin G(A)\}$ das Spektrum von a und $R(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ heißt die <u>Resolventenmenge</u> von a. Die Abbildung

$$R_a : R(a) \to A \,;\quad R_a(\lambda) = (a - \lambda 1_A)^{-1}$$

heißt die <u>Resolventenabb.</u> von $a \in A$.

3.2 <u>Bemerkung</u>: Ist A eine unitale Banachalg., so ist $R(a)$ offen in $\mathbb{C}$, denn $G(A)$ ist offen in A nach 1.16 und die Abb. $\varphi_a : \mathbb{C} \to A \,;\ \varphi_a(\lambda) = a - \lambda$ ist stetig, und damit ist $R(a) = \varphi_a^{-1}(G(A))$ offen.
Da $R(a)$ offen ist $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus R(a)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$!

3.3 <u>Bsp</u>: (1) Sei $A = M_n(\mathbb{C})$. Dann ist $\sigma(a)$ die Menge der EW von a für $a \in M_n(\mathbb{C})$.
(2) Sei $A = C(X)$ mit X kompakt und T_2. Dann gilt

$$f \in G(C(X)) \iff f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X.$$

<u>Denn</u>: „$\Leftarrow$" Ist $f(x) \neq 0 \ \forall x$, so ist $\frac{1}{f}$ Inverses zu f.
„$\Rightarrow$" $\exists\, g \in C(X)$ mit $f \cdot g = 1$, so folgt $f(x) g(x) = 1 \ \forall x$
also $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X$.
Damit folgt: $\sigma(f) = f(X) \subseteq \mathbb{C}$, denn
$(f - \lambda 1) \notin G(C(X)) \iff \exists\, x \in X$ mit $0 = (f - \lambda 1)(x) = f(x) - \lambda$
$\iff \lambda \in f(X)$.

3.4 <u>Satz</u> Sei A eine unitale Banachalgebra und sei $a \in A$. Dann gilt: Ist $\lambda_0 \in R(a)$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|} \left(= \frac{1}{\|(a - \lambda_0 1)^{-1}\|} \right)$,
so ist auch $\lambda \in R(a)$ und es gilt

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n \quad \left(\text{Potenzreihenentw. von } R_a\right)$$

<u>Bew</u>: Nach Voraussetzung gilt
$\|(a - \lambda_0 1) - (a - \lambda 1)\| = |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{\|(a - \lambda_0 1)^{-1}\|}$. Dann folgt
mit $d := (\lambda - \lambda_0) R_a(\lambda_0)$, dass $\|d\| < 1$. Mit

1.15 (Neumann-Reihe) folgt: $1-d$ ist invertierbar mit $(1-d)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d^n$.

Dann folgt:

$$(a-\lambda_0 1)(1-d) = (a-\lambda_0 1)(1 - R_a(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0))$$
$$= (a-\lambda_0 1) - (\lambda-\lambda_0)1 = a - \lambda 1,$$

also ist $a-\lambda 1$ invertierbar mit

$$R_a(\lambda) = (a-\lambda 1)^{-1} = (1-d)^{-1}(a-\lambda_0 1)^{-1}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} d^n\right) R_a(\lambda_0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^n (\lambda-\lambda_0)^n\right) R_a(\lambda_0)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^{n+1} (\lambda-\lambda_0)^n. \quad \blacksquare$$

<u>3.5 Satz</u> Sei $\{0\} \neq A$ eine unitale Banachalgebra. Dann gilt für alle $a \in A$: $\emptyset \neq \sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$. Insb. folgt, dass $\sigma(a)$ kompakt ist.

<u>Bew</u>: Ist $\lambda > \|a\|$, so gilt $\|\frac{1}{\lambda} a\| < 1$ und damit ist $1 - \frac{1}{\lambda} a = -\frac{1}{\lambda}(a-\lambda 1)$ invertierbar nach 1.15. Dann ist auch $a-\lambda 1$ invertierbar, also $\lambda \in R_a(\lambda)$. Es folgt $\sigma(a) \subseteq B_{\|a\|}(0)$ und da $\sigma(a)$ abg. in $\mathbb{C}$ (siehe 3.2) ist $\sigma(a)$ kompakt.

Der schwierige Teil ist zu zeigen, dass $\sigma(a) \neq \emptyset$!

<u>Annahme</u> $\sigma(a) = \emptyset$. Dann folgt $a \neq 0$, da sonst $0 \in \sigma(a)$. Ferner folgt $R(a) = \mathbb{C}$, und damit ist $R_a : \mathbb{C} \to A$; $\lambda \mapsto (a-\lambda 1)^{-1}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.

Sei nun $\varphi \in A'$ ein bel. stetiges lin. Fkt. auf A und def. $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $\varphi_a(\lambda) = \varphi(R_a(\lambda)) = \varphi((a-\lambda 1)^{-1})$.

Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ fest. Dann gilt nach 3.4 für $|\lambda-\lambda_0| \leq \frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|}$

$$\varphi_a(\lambda) = \varphi_a\left(\sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_a(\underbrace{R_a(\lambda_0)^{n+1}}_{a_n \in \mathbb{C}})(\lambda-\lambda_0)^n,$$

also ist φ_a in einer Umgeb. von λ_0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Damit ist $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. (also eine ganze Fkt).

Beh: φ_a ist beschränkt.

Beweis: Da φ_a stetig, ex. ein $C \geq 0$ mit $|\varphi_a(\lambda)| \leq C$ für alle $\lambda \in B_{2\|a\|}(0)$. Ist $|\lambda| \geq 2\|a\|$, so gilt $\|\frac{1}{\lambda} a\| \leq \frac{1}{2}$, und damit

$$\|(1 - \tfrac{1}{\lambda} a)^{-1}\| \overset{1.15}{=} \|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{a}{\lambda}\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n = 2,$$

und dann folgt

$$\|R_a(\lambda)\| = \|\underbrace{(a - \lambda 1)^{-1}}_{(-\lambda(1-\frac{1}{\lambda}a))^{-1}}\| = \|-\tfrac{1}{\lambda}(1 - \tfrac{1}{\lambda}a)^{-1}\| \leq \frac{2}{|\lambda|} \leq \frac{1}{\|a\|},$$

und dann folgt $|\varphi_a(\lambda)| = |\varphi(R_a(\lambda))| \leq \frac{\|\varphi\|}{\|a\|}$ $\forall \lambda \geq 2\|a\|$

Also ist φ_a beschränkt.

Nach Liouville folgt nun, dass φ_a für alle $\varphi \in A'$ konstant ist. Damit folgt $\varphi(R_a(\lambda)) = \varphi(R_a(0))$ $\forall \varphi \in A'$ und mit Hahn-Banach folgt dann $R_a(\lambda) = R_a(0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Das heißt: $(a - \lambda 1)^{-1} = a^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow a - \lambda 1 = a$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda 1 = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Wid! ⊠

3.6 Bemerkung: Im Fall von Banachalgebren über $\mathbb{R}$ kann auch $\sigma(a) = \emptyset$ vorkommen! Ist z.B. $A = M_2(\mathbb{R})$ und $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (= Drehung um 90°) so besitzt a keine reellen EW, also $\sigma(a) = \emptyset$ über $\mathbb{R}$!
Dies ist mit ein Grund, warum wir hier immer Algebren über $\mathbb{C}$ betrachten!

3.7 Definition Sei A eine unitale Banachalgebra (über $\mathbb{C}$). Ist dann $a \in A$, so heißt

$\rho(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$ der Spektralradius von a (macht Sinn, da $\sigma(a) \neq \emptyset$ und beschränkt).

Wir wollen eine wichtige Formel für den Spektralradius beweisen. Dazu benötigen wir:

<u>3.8 Lemma</u> Sei A eine unitale Algebra und sei $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ ein komplexes Polynom.
Dann gilt für alle $a \in A$: $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

<u>Bew:</u> Sei o.B.d.A. p nicht konstant und sei $\alpha \in \mathbb{C}$.
Dann ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $0 \neq c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(\lambda) - \alpha = c \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i), \quad \text{und dann}$$

$$p(a) - \alpha 1 = c \prod_{i=1}^{n} (a - \lambda_i 1).$$

Es folgt: $p(a) - \alpha 1 \in G(A) \Leftrightarrow (a - \lambda_i 1) \in G(A) \; \forall 1 \leq i \leq n$ und damit

$$\alpha \in \sigma(p(a)) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \lambda_i \in \sigma(a)$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i \in \sigma(a) \text{ mit } p(\lambda_i) = \alpha. \qquad \blacksquare$$

<u>Erinnerung:</u> Ist E norm. Raum, so heißt $B \subseteq E$ <u>schwach beschränkt</u>, falls für alle $\varphi \in E'$ gilt, dass $\varphi(B)$ in $\mathbb{C}$ beschränkt ist.
Als Folgerung des Satzes von Banach-Steinhaus haben wir in der FA gezeigt, dass jede schwach beschränkte Teilmenge von E auch normbeschränkt ist. (Siehe FA 10.7).
Wir benötigen diese Tatsache im Beweis von

<u>3.9 Satz</u> (Spektralradiusformel von Gelfand '41)
Sei A eine unitale Banachalgebra (wie immer über $\mathbb{C}$). Dann gilt für alle $a \in A$:

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Beachte: Der Satz stellt eine Verbindung zwischen einem rein algebraischen Objekt, nämlich $\sigma(a)$ (bzw. $\varrho(a)$) und einer top. Größe, nämlich $\|a\|$ her!

Beweis vom Satz: Wir wollen zeigen:

$$\varrho(a) \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \varrho(a),$$

wobei $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$ den Limes inferior bzw. Limes superior bezeichnen. Damit folgt dann die Behauptung!

1) $\varrho(a) \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$: Ist $\lambda \in \sigma(a)$, so ist nach 3.7 auch $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und mit 3.5 folgt dann $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|a^n\|$, also $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann auch $\varrho(a) \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

2) Wir zeigen, dass für alle $|\lambda| > \varrho(a)$ ein $c_\lambda > 0$ ex., so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{\|a^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \leq c_\lambda$.

Dann folgt $\|a^n\| \leq c_\lambda |\lambda|^{n+1}$, also $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq c_\lambda^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{\frac{1}{n}} |\lambda|$ und damit

$$\overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} (c_\lambda |\lambda|)^{\frac{1}{n}} |\lambda| = |\lambda| \overbrace{\lim_{n\to\infty} (c_\lambda |\lambda|)^{\frac{1}{n}}}^{\to 1} = |\lambda|,$$

und damit $\overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \varrho(a)$.

Zum Beweis der Existenz von c_λ zeigen wir, dass $\{\frac{1}{\lambda^{n+1}} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in A schwach beschränkt ist. Wie oben erklärt, folgt dann die Behauptung.

Sei dazu $\varphi \in A'$. Wie im Bew. von Satz 3.5 betrachten wir die holom. Fkt. $\varphi_a : R_a \to \mathbb{C}$; $\varphi_a(\lambda) = \varphi(R_\lambda(a)) = \varphi((a - \lambda 1)^{-1})$.

Da $\mathcal{U}^{\varrho(a)} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \varrho(a)\} \subseteq R(a)$ ist φ_a insb. auch holomorph auf $\mathcal{U}^{\varrho(a)}$. Ist $|\lambda| > \|a\|$, so gilt

$R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} \underset{(\|\frac{a}{\lambda}\|<1)}{\overset{1.15}{=}} -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$

Damit folgt $\varphi_a(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n)\frac{1}{\lambda^{n+1}}$ für $|\lambda| > \|a\|$.

Nach 2.12 gilt diese Reihenentwicklung dann auch für alle $|\lambda| > \rho(a)$. Insb. folgt $\forall\, \lambda > \rho(a)$: $\varphi(a^n)\frac{1}{\lambda^{n+1}} \to 0$, also $\{\varphi(\frac{a^n}{\lambda^{n+1}}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt $\boxtimes$

<u>3.10</u> Sei $\phi: A \to B$ ein unitaler Algebra-Homom. Dann gilt $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$. Insb. gilt für jede Unteralg. $A \subseteq B$ mit $1_B \in A$, dass $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ für alle $a \in A$.

[Hier bez. $\sigma_A(a)$ (bzw. $\sigma_B(a)$) das Spektrum von a als Element von A (bzw. B).]

<u>Bew:</u> Ist a^{-1} Inverses von a, so gilt auch $\phi(a^{-1})\phi(a) = \phi(a^{-1}a) = \phi(1_A) = 1_B = \phi(a)\phi(a^{-1})$, also gilt $\phi(a) \in G(B)$. Damit folgt $R_A(a) \subseteq R_B(\phi(a))$ und $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$. $\boxtimes$

<u>Beachte:</u> In Blatt 2, Aufg. 1+2 zeigen Sie, dass im allg. <u>nicht gilt</u>, dass $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ wenn $A \subseteq B$ mit $1_B \in A$. Es gilt aber stets:

<u>3.11</u> <u>Lemma</u> Sei B eine unitale BA und sei $A \subseteq B$ eine abg. Unteralg. von B mit $1_B \in A$. Dann gilt $\partial\sigma_A(a) := \sigma_A(a) \setminus \mathring{\sigma}_A(a) \subseteq \sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$.

<u>Bew:</u> Wir müssen nur die erste Inklusion zeigen. Sei dazu $\lambda \in \partial\sigma_A(a)$. Dann ex. eine Folge $(\lambda_n)_n$ in $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(a) = R_A(a)$ mit $\lambda_n \to \lambda$.

<u>Ann:</u> $\lambda \notin \sigma_B(a)$. Dann gilt $\lambda \in R_B(a)$ und

$$\underbrace{(a-\lambda_n 1)^{-1}}_{\in A \subseteq B} \to \underbrace{(a-\lambda 1)^{-1}}_{\in B}, \text{ also } (a-\lambda 1)^{-1} \in A,$$

da A abgeschlossen in B. Wid zu $\lambda \in \sigma_A(a)$?? ⊠

Wir wollen nun noch eine Definition des Spektrums für Elemente in <u>nicht</u>-unitalen Algebren A angeben.

<u>3.12</u> <u>Definition</u> Sei A eine Algebra. Dann def. wir

$$\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a) \quad \text{mit} \quad \tilde{A} = \begin{cases} A, & \text{falls } A \text{ unital} \\ A^1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>3.13</u> <u>Bsp.</u> Sei $A = C_0(X)$ mit X lokalkompakt, T_2 und X <u>nicht</u> kompakt. Sei $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X. Dann ist

$$C_0(X) = \{f \in C(X_\infty) \mid f(\infty) = 0\}$$

und wir erhalten

$$C_0(X)^1 \cong C(X_\infty) \quad \text{via} \quad (f,\lambda) \mapsto f + \lambda 1$$

wobei auf der rechten Seite die 1 die Einsfkt auf X_∞ bezeichnet. Damit folgt für alle $f \in C_0(X) \subseteq C(X_\infty)$:

$$\sigma_{C_0(X)}(f) = f(X_\infty) = \{0\} \cup f(X) = \overline{f(X)},$$

da für X nicht kompakt stets gilt, dass $0 \in \overline{f(X)}$.

<u>3.14</u> <u>Bem</u> (i) Ist A <u>unital</u>, so ist $A^1 \cong A \oplus \mathbb{C}$ als direkte Summe von Algebren (d.h. auf $A \oplus \mathbb{C}$ betr. wir die Mult. $(a,\lambda)(b,\mu) = (ab, \lambda\mu)$). Der Isom. ist geg. durch

$$\phi : A^1 \to A \oplus \mathbb{C}, \quad \phi(a,\lambda) = (a + \lambda 1_A, \lambda)$$

wobei $1_A \in A$ die geg. Eins von A bezeichnet.

Die Algebra $A \oplus \mathbb{C}$ hat dann die Eins $(1_A, 1_\mathbb{C})$.
Es folgt: Ist $a \simeq (a,0) \in A$, so gilt

$$\lambda \in \sigma_{A^1}(a) \iff (a-\lambda 1_A, -\lambda) \notin G(A^1)$$
$$\iff \lambda = 0 \text{ oder } a-\lambda 1_A \notin G(A)$$
$$\iff \lambda \in \{0\} \cup \sigma_A(a).$$

Es gilt also $\sigma_{A^1}(a) = \{0\} \cup \sigma_A(a)$

(2) Ist A nicht unital, so gilt immer $0 \in \sigma_A(a)$,
denn A ist Ideal in $\tilde{A} = A^1$, d.h. $a = a - 0 1 \notin G(\tilde{A})$.